522. 非同次型線状移動可能函数方程式ニ就イテ (IV)

北川 敏男 (阪大)

1. Γ ガソノ母函数 $G(\lambda)$ ニ関シテ或ル種ノ條件ヲ充ス *linear translatable operator* デアリ、與ヘラレタ函数 $g(x)$ ガ *infinity* ニ於ケル *behavior* ニツキ若干ノ制限ノモトニアルトキ. 函数方程式

(1) $\Gamma_x f(t) = g(x)$

ノ解 $f(x)$ ノウチニ、特ニ主解ト稱サレル解ガ存在スル。ココデハ, (II) (同題, 96号, 436番参照) ノ所論ニ於イテ *Schmidt* ノ函数 $\widetilde{N}_A(x, f; P)$ ヲ *modify* スルコトニヨリ主解ト一致スル解ヲ得ラレルコトヲ示サウ.

2. 今, $g(x)$ ハ m 回連続微分可能デアツテ

(2) $\lim_{x\to\infty} g^{(m)}(x)=0$

ナリトスル。然ルトキ Wiener ノ operational calculus ニ於ケルガ如ク

$$
(3)\begin{cases}
1^\circ.\quad g_A(u)=1 & |u|<A\ \text{ニテ} \\
2^\circ.\quad g_A(u)=0 & |u|\geqq A+\delta\ \text{ニテ} \\
3^\circ.\quad A\leqq|u|\leqq A+\delta\ \text{ニテ無限回微分可能ニシテ} & \\
\quad\text{スベテノ自然数ニ對シテ} & \\
\quad g_A^{(n)}(A)=g_A^{(n)}(-A)=g_A^{(n)}(A+\delta)=g_A^{(n)}(-A-\delta)=0 &
\end{cases}
$$

ニヨリ到ル處連続ナ函数 $g_A(u)$ ヲ定義スル。（A ハアトデ便宜的ニ選ベル常数デアル）、ソコデ $\alpha<0<\beta$ トシテ

$$(4)\quad g_1(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\beta+iu)(\xi-x)} g_A(u)\,du\right\}d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0} g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+iu)(\xi-x)} g_A(u)\,du\right\}d\xi$$

ト置ク、コレノ存在ハ (2) カラ

(5) $|g(x)|<M(1+|x|^m)$

ナル如キ M ノ存在ヲ示シウルカラ明ラカ。α,β ノ選ビ方ハアトデ述ベル。更ニ $g_1(x)$ ハ無限回微分可能ナルコトガ容易ニワカル。

3. Γ ノ母函数 $G(\lambda)$ ヲ整函数トシ原点ハ k 次ノ零点ナリトスル。即チ $G^{(\nu)}(0)=0\ (0\leqq\nu\leqq k-1)$, $G^{(k)}(0)\neq 0$. トオク（$k\geqq 0$ デアル）

更ニ、零ニ最モ近イ $G(\lambda)$ ノ零点（$\neq 0$）ノ半径ハ 1 ヨリ小ナ

ラズトスル。コレラノコトハ $G(\lambda)$ ニ関スル何等本質的ナ制限デナイ。

茲ニ於テ *generalised Bernoulli's polynomials* $B_\nu^k(x)$ ヲ次ノ展開式ノ係数ニヨリ定義スル：

$$(6)\qquad \frac{\lambda^k e^{\lambda x}}{G(\lambda)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu B_\nu^k(x)$$

然ルトキ，(6) ノ収斂半径ハ 1 ヨリ大デアル。

今

$$(7)\qquad Max\left(\sqrt{|\beta|^2+|A+\delta|^2},\ \sqrt{|\alpha|^2+|A+\delta|^2}\right)\leqq\eta<1$$

ナル様ニ A,δ,β,α ヲ選ンデオクト、（ソレハ常ニ可能デアル）

(4) カラシテ

$$(8)\qquad |g_1^{(\nu)}(x)|<N\eta^\nu \qquad (\nu=0,1,2,\cdots\cdots)$$

ナル如キ常数 N ガアル。依ッテ（$B_\nu^k(0)=B_\nu^k$ トオイテ）

$$(9)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}B_\nu^k g_1^{(\nu)}(x)$$

ハ任意ノ有限区間ノ x ニ関シテ、一様且ツ絶対的ニ収斂スル。依ッテ積分ト *summation* ノ順序交換ガ許サレテ

$$(10)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}B_\nu^k g_1^{(\nu)}(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-(\beta+iu))^k}{G(-(\beta+iu))}e^{(\beta+iu)(\xi-x)}\varphi_A(u)du\right\}d\xi$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0}g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(-(\alpha+iu))^k}{G(-(\alpha+iu))}e^{(\alpha+iu)(\xi-x)}\varphi_A(u)du\right\}d\xi$$

(10) ノ両辺ニ Γ ヲ施ス。然ルトキ、(5) ニ依ッテ、右辺デ、二度 Γ ト *integrations* トノ順序交換ガ許サレテ

$$(11)\quad \Gamma\left\{\sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu^{k} g_1^{(\nu)}(x)\right\} = \int_0^{\infty} g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(-(\beta+iu))^{k} e^{(\beta+iu)(\xi-x)} g_A(u)\,du\right\}d\xi$$

$$+\int_{-\infty}^{0} g(\xi)\left\{\int_{-\infty}^{\infty}(-(\alpha+iu))^{k} e^{(\alpha+iu)(\xi-x)} g_A(u)\,du\right\}d\xi$$

(11) ノ右辺ハ $g_1^{(k)}(x)$ ニ等シイ。依ツテ (10) ナル函数ハ

$$(12)\quad \Gamma_1 f(x) = g_1^{(k)}(x)$$

ノ一ツノ解ヲ與ヘルコトヲ知ツタ。

4. 次ニ

$$g(x) - g_1(x) = g_2(x)$$

トオキ

$$(13)\quad \Gamma f(x) = g_2(x)$$

ノ解ヲ求メル。

$g_2(x)$ ハ明ラカニ (II) ノ假定 I (96 号 p. 11) ヲ充シテキルカラ、今ソコノ假定 {II} ガ $P(\lambda)\equiv 1$ ニ對シテ充サレテキルトスルト (II) ノ定理 1 ニ依ツテ

$$(14)\quad \underset{B\to\infty}{l.i.m.}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_0^{\infty} g_2(t)\left\{\int_{-B}^{B}\frac{e^{(\beta+i\nu)(x-t)}}{G(\beta+i\nu)}d\nu\right\}dt\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{0} g_2(t)\left\{\int_{-B}^{B}\frac{e^{(\alpha+i\nu)(x-t)}}{G(\alpha+i\nu)}d\nu\right\}dt\right\}$$

ガ解ヲ與ヘル。吾々ハ (14) ヲ調ベテミヤウ。以下コレヲ $f_2(x)$ トオクコトニスル。